Didier Trotoux
IUT & IREM, Université de Caen Normandie, France

Mathématiques et expérience

séminaire du groupe PEHPST Caen, 4 décembre 2017

Expérience / démonstration

Les mathématiques sont souvent décrites comme lieu de la rigueur et de la démarche hypothético-déductive.

Expérience : relatif aux **sens**, **particulier**

Démonstration : relatif à la **raison**, **universalité**.

Les notions d'expérience et de démonstration peuvent donc paraître opposées.

Quelle est la valeur de l'expérience en mathématiques ?

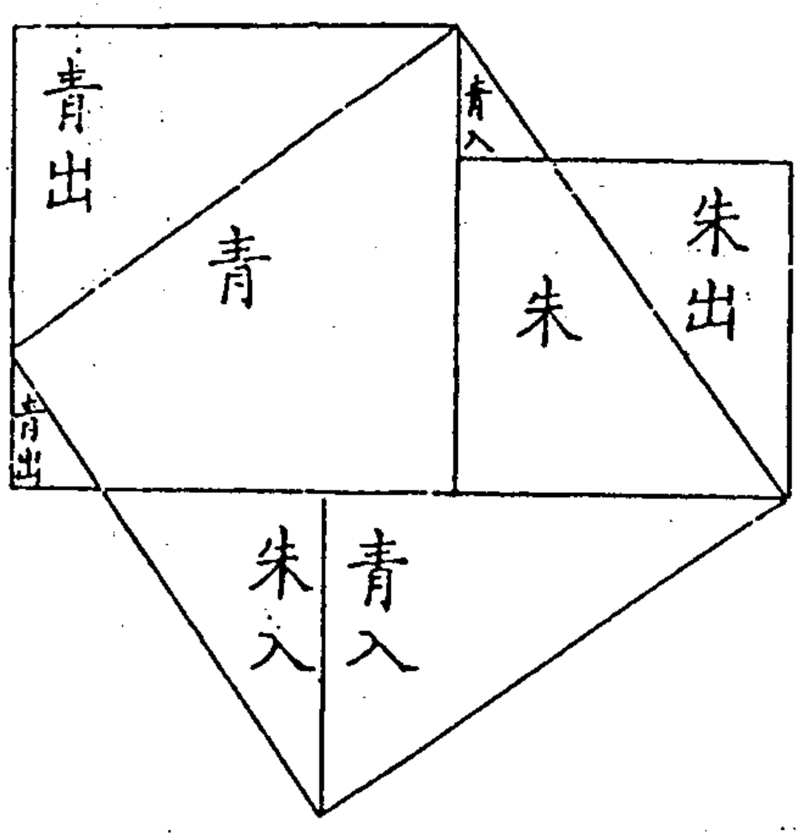
L'expérience peut-elle démontrer une théorie ou seulement aider à découvrir ce qu'il faudra ensuite comprendre rationnellement ?

L’expérience peut, dans certains contextes, être un moyen de preuve.

L’expérience permet de découvrir des théories qui peuvent ensuite être prouvées par des raisonnements ou, au contraire, d’invalider une conjecture.

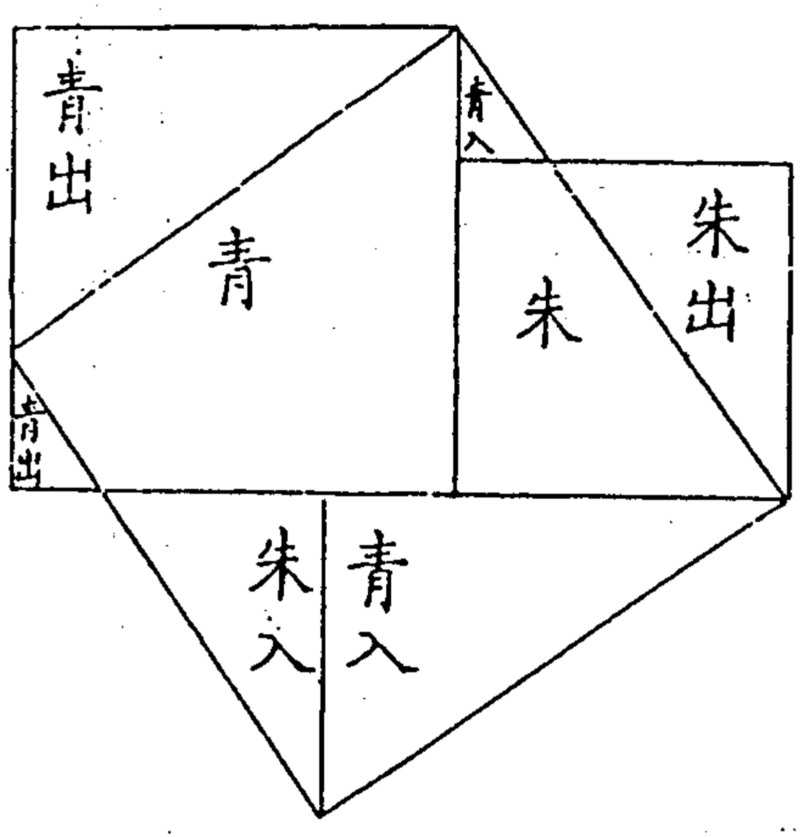
Dans le domaine des probabilités, la loi des grands nombres de J. Bernoulli permet de justifier l’utilisation de l’expérimentation.

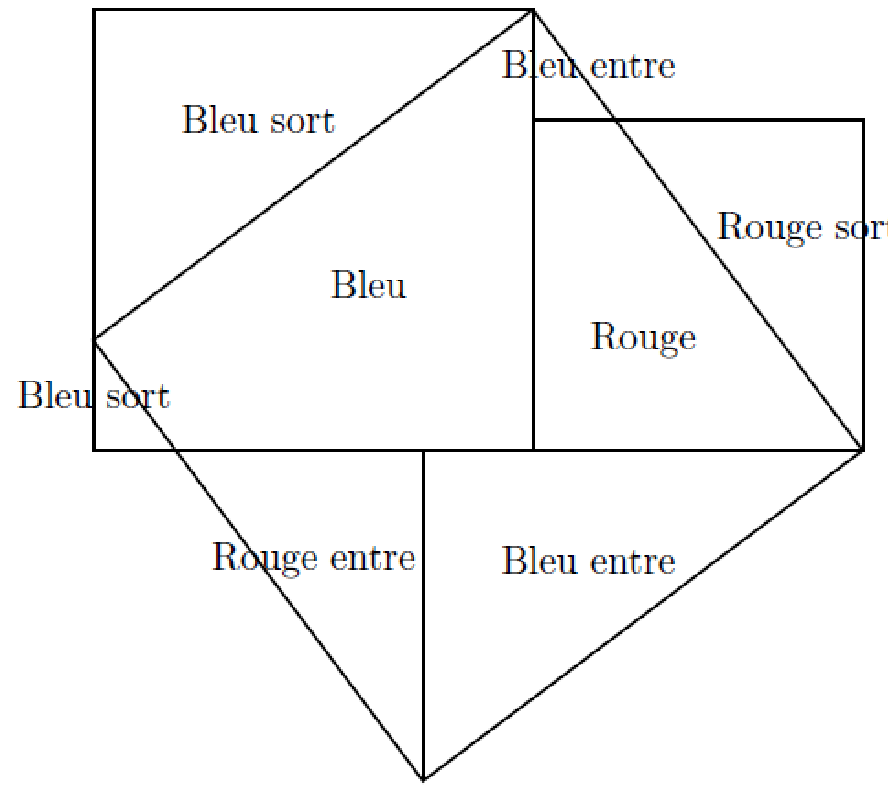
L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



Les neufs chapitres sur l'art du calcul, anonyme, II^{e} s. avant J. C.
Commentaire de Liu Hui III^{e} s. après J. C.

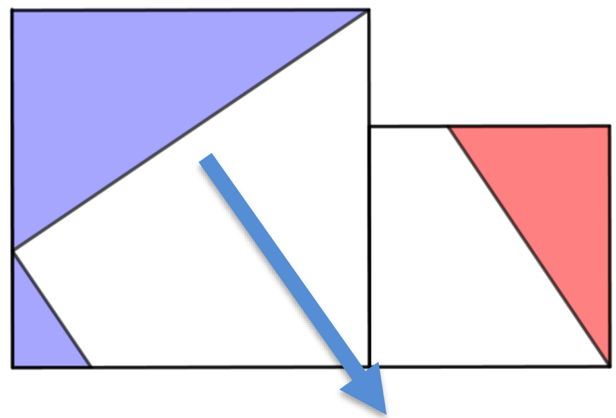
L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?





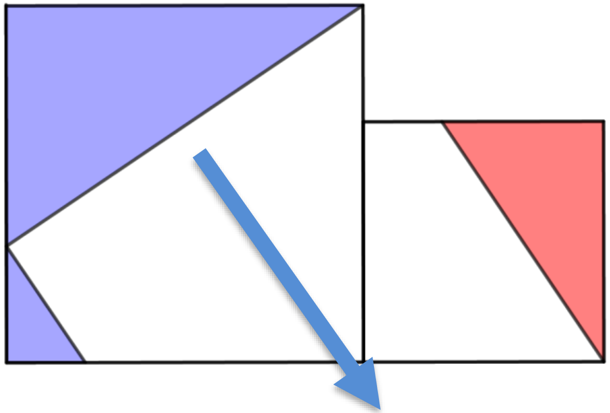
Les neufs chapitres sur l'art du calcul, anonyme, II^{e} s. avant J. C.
Commentaire de Liu Hui III^{e} s. après J. C.

L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?

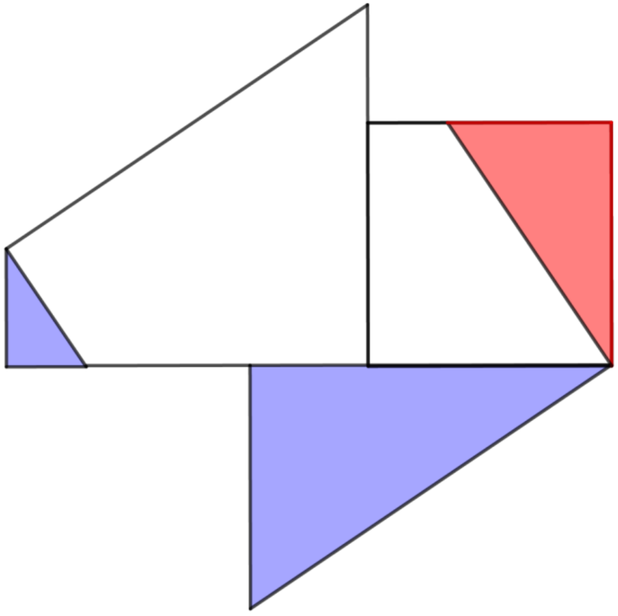


Bleu sort, bleu entre .

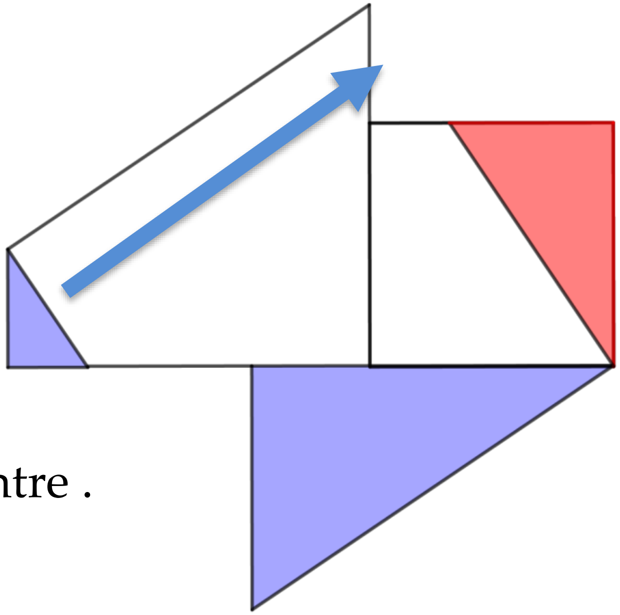
L’expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



Bleu sort, bleu entre .

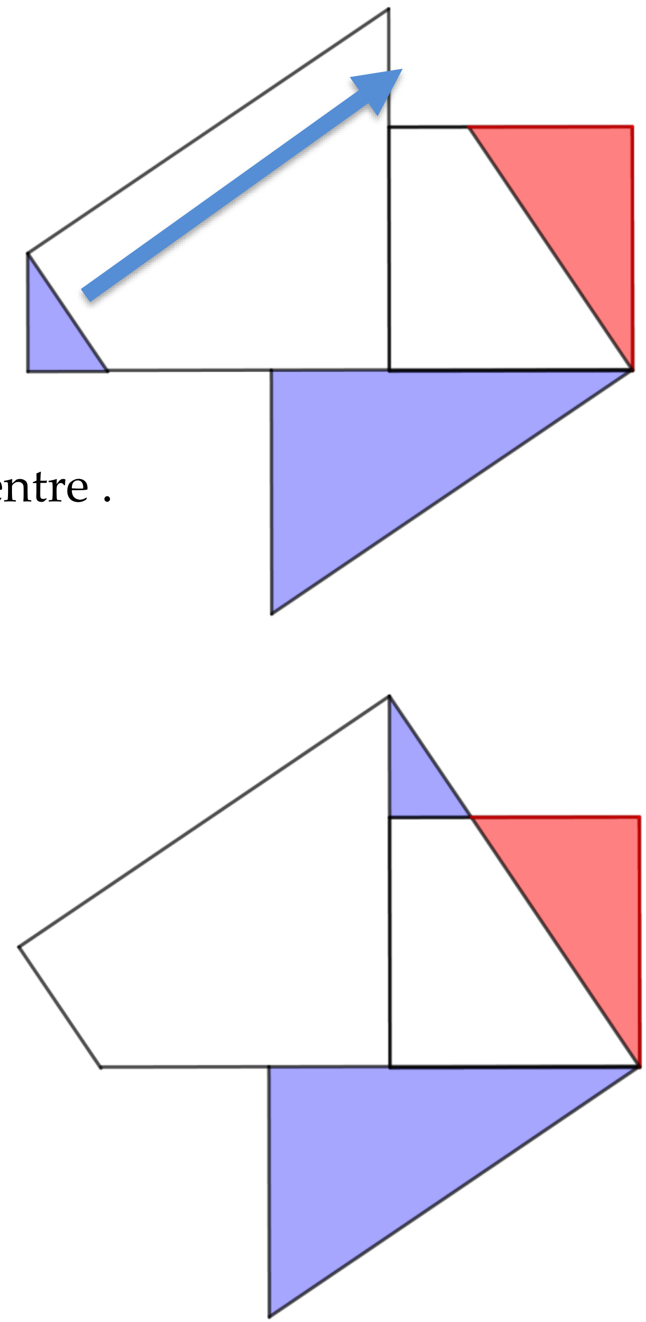


L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



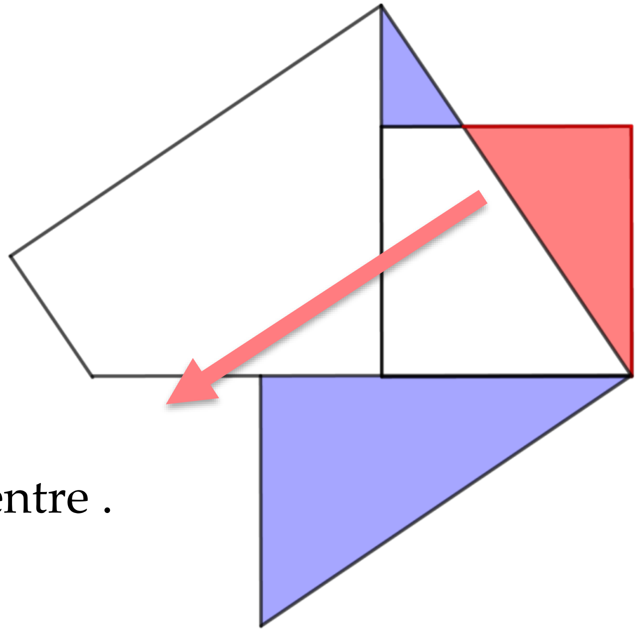
Bleu sort, bleu entre .

L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



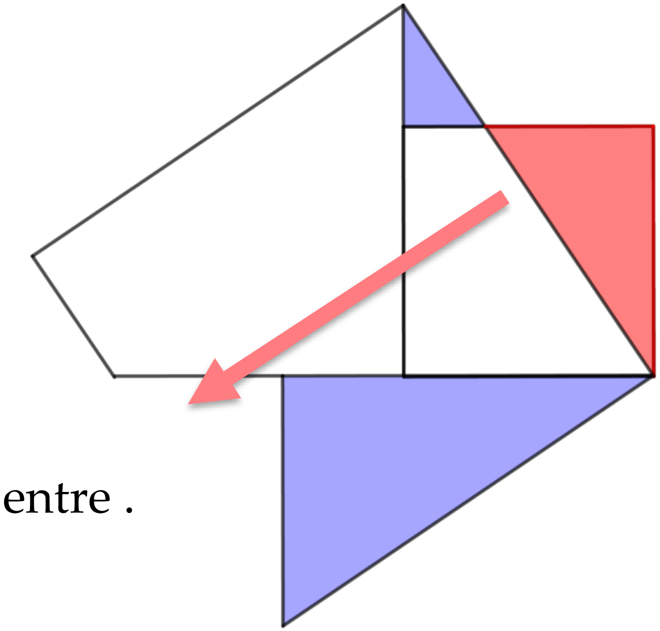
Bleu sort, bleu entre .

L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?

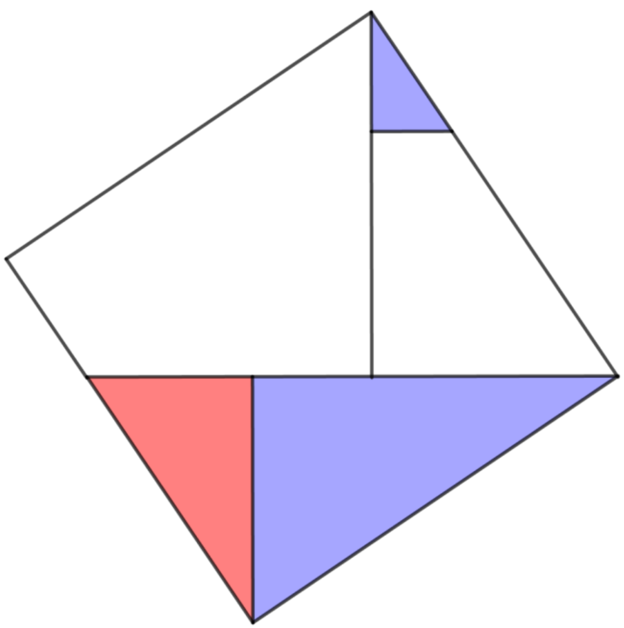


Rouge sort, rouge entre .

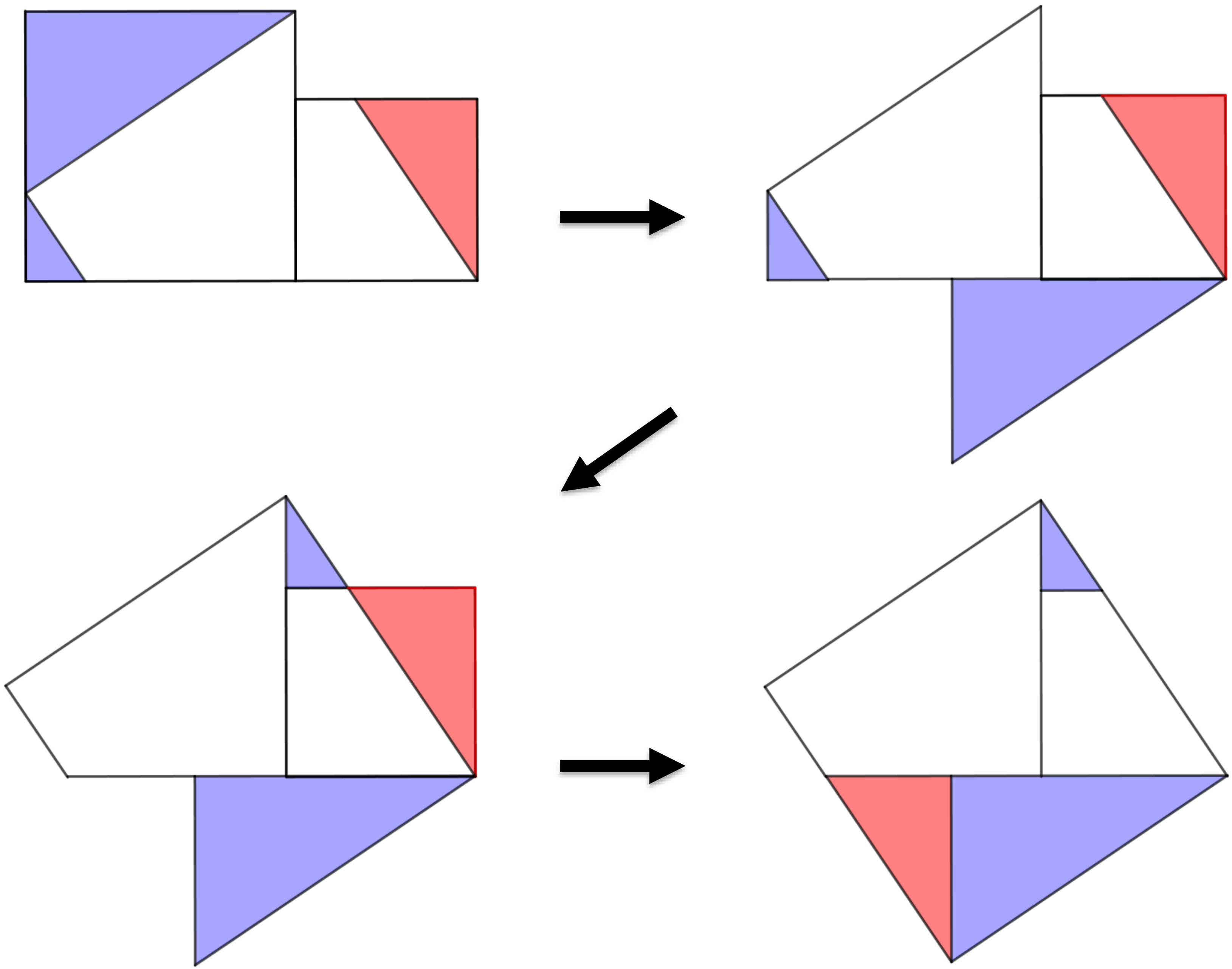
L’expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



Rouge sort, rouge entre .

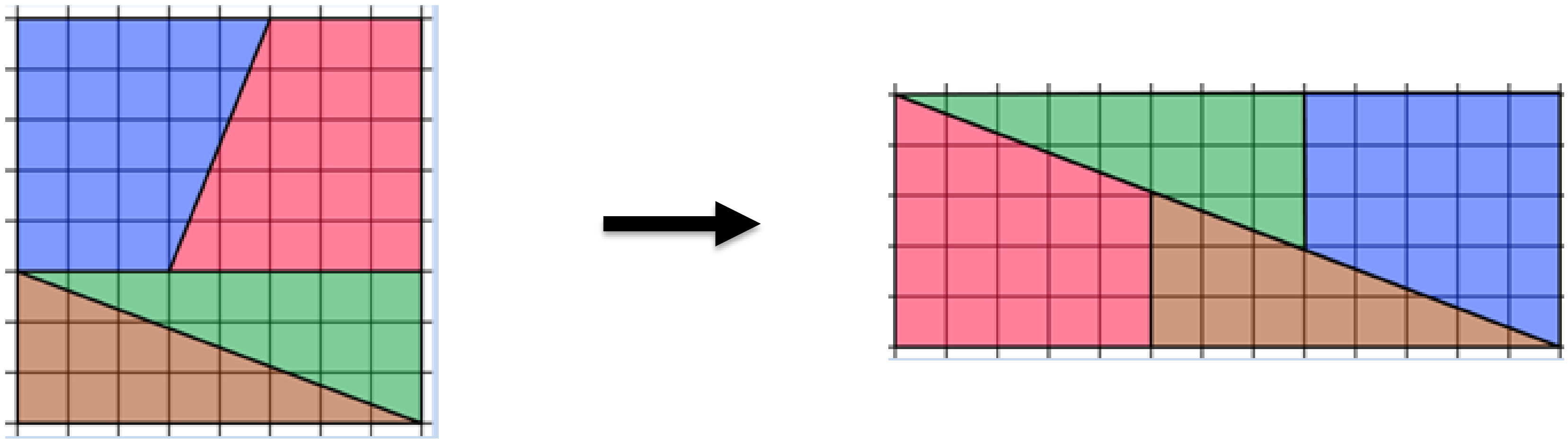


L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?



L'expérience, moyen de preuve ou « monstration » ?

On peut objecter à cette méthode qu'elle n'est pas rigoureuse et pourrait amener à des mauvais découpages comme le suivant :



Il se trouve qu'on ne connaît pas d'erreur mathématique du type précédent dans l'histoire chinoise.

L’expérience, moyen de découverte

« *Certaines propriétés, en effet, qui m’étaient d’abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu’une étude faite par cette méthode n’est pas susceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d’édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de la chercher sans la moindre connaissance …* »

Archimède (287-212 avant J. C.),

La méthode relative aux théorèmes mécaniques, envoi à Ératosthène.

L’expérience, moyen de découverte

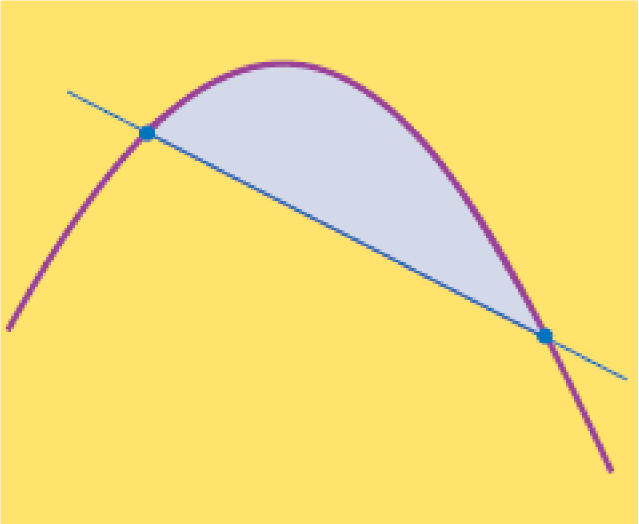
« Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m’être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur … »

Archimède, La méthode relative aux théorèmes mécaniques, envoi à Ératosthène.

L'expérience, moyen de découverte

« Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur … »

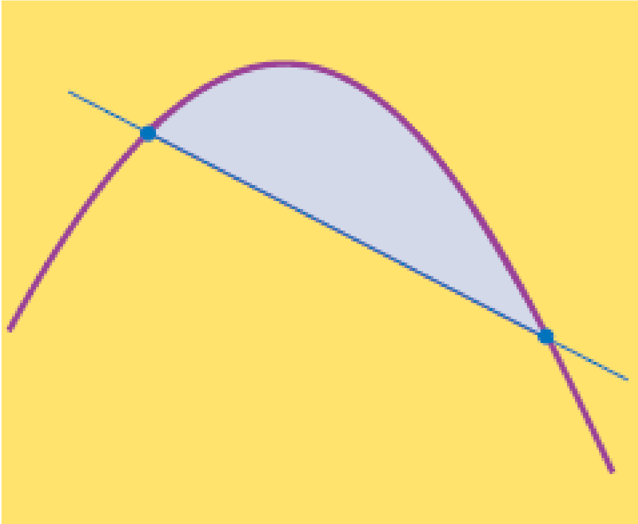
Archimède, La méthode relative aux théorèmes mécaniques, envoi à Ératosthène.

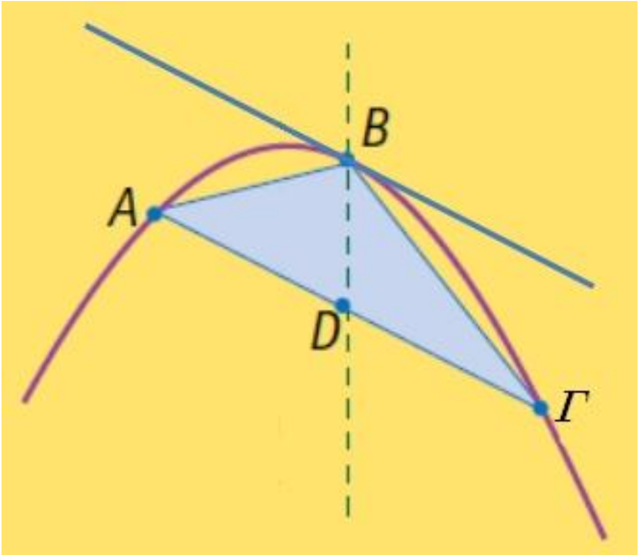


L'expérience, moyen de découverte

« Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur … »

Archimède, La méthode relative aux théorèmes mécaniques, envoi à Ératosthène.





L'expérience, moyen de découverte

« Soit le segment $AB\Gamma$ compris entre la droite $A\Gamma$ et la parabole $AB\Gamma$; divisons $A\Gamma$ en deux parties égales par le point Δ, menons la parallèle ΔBE au diamètre et les droites AB et $B\Gamma$ joignant B à A et à Γ. Je dis que le segment $AB\Gamma$ est équivalent au quatre tiers du triangle $AB\Gamma$. »

Archimède, La méthode relative aux théorèmes mécaniques, Proposition 1.

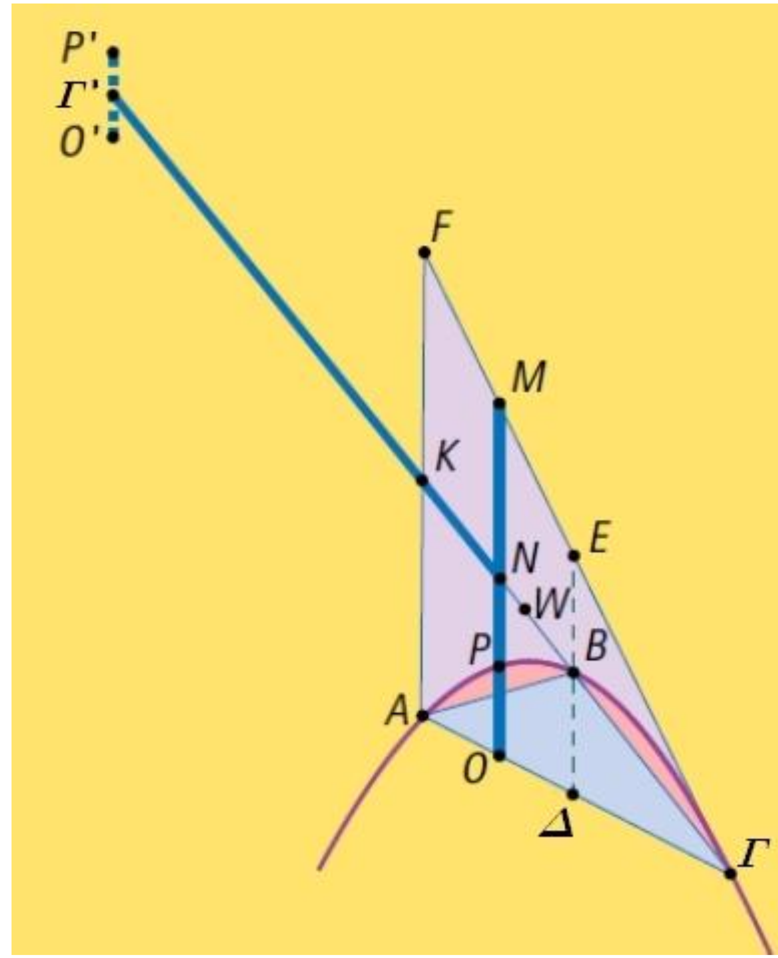
Méthode mécanique de pesée :

MO est à OP comme ΓN est à NK.

Triangle AΓF = 4 x Triangle ABΓ

Γ'K = KΓ et KW = 1/3 KΓ

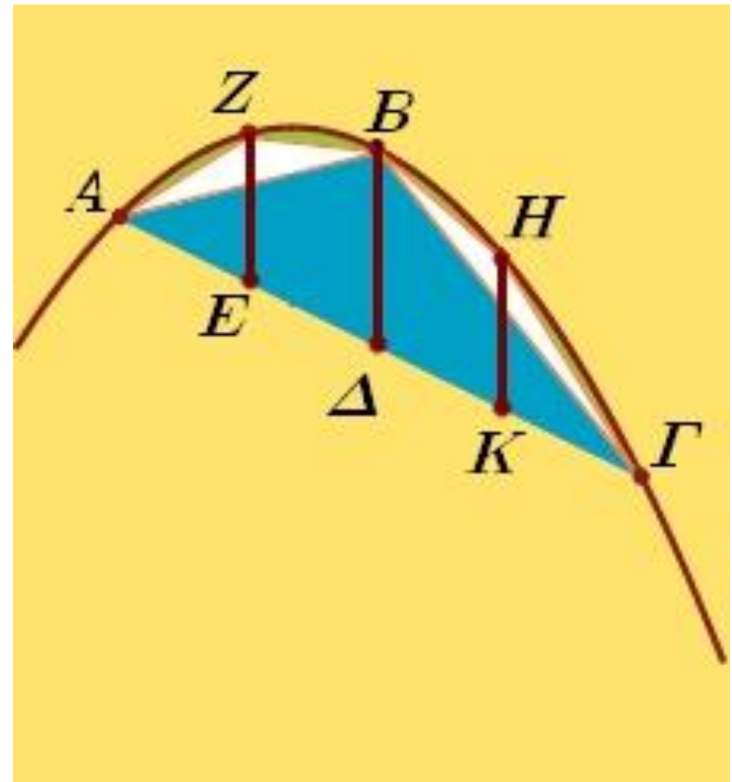
Le triangle AΓF centré sur W est mis en équilibre avec le segment de parabole autour de K



L’expérience, moyen de découverte

« *Tout segment compris entre une droite et une parabole est équivalent au quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.* »

Archimède, La quadrature de la parabole, Proposition 24.

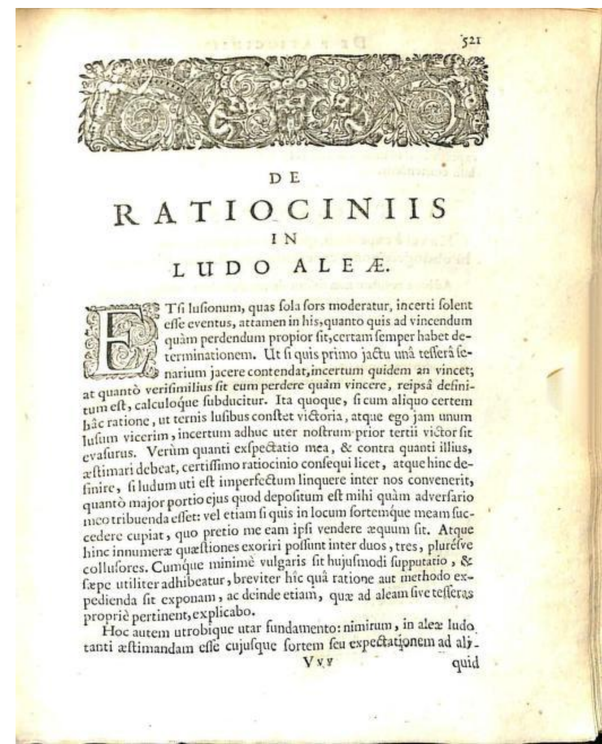


Preuve géométrique par la méthode d’exhaustion (double démonstration par l’absurde et descente finie sous un seuil donné).

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres de Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le tournant du début du XVIII^{e} s. en théorie des probabilités.

– Peu de textes publiés depuis le traité, *De ratiociniis in ludo aleae*, Christiaan Huyghens (1657) ;



521

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

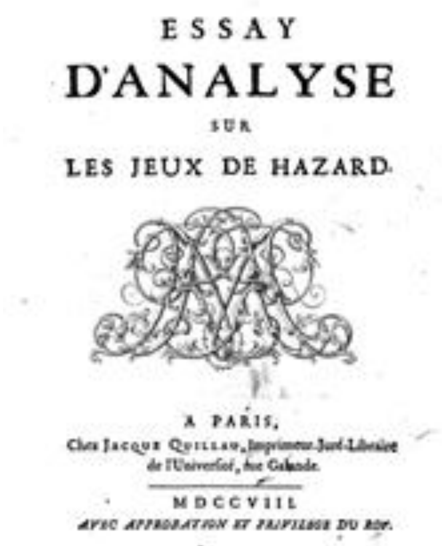
Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid

Vvv

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres de Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le tournant du début du XVIII^{e} s. en théorie des probabilités.

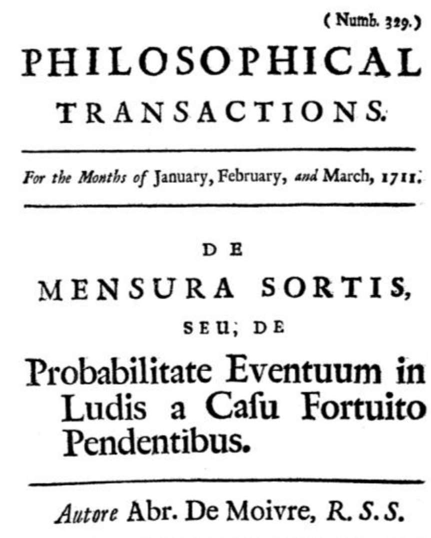
– Peu de textes publiés depuis le traité, *De ratiociniis in ludo aleae*, Christiaan Huyghens (1657) ;
– 1708, *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Pierre Rémond de Montmort, réédition augmentée 1713 ;



La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres de Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le tournant du début du XVIII^{e} s. en théorie des probabilités.

- Peu de textes publiés depuis le traité, *De ratiociniis in ludo aleae*, Christiaan Huyghens (1657) ;
- 1708, *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Pierre Rémond de Montmort, réédition augmentée 1713 ;
- 1711, *De mensura sortis*, Abraham de Moivre, mémoire développé en un traité *Doctrines of Chances*, éd. 1718, réédition en 1738 et 1756 ;


(Numb. 329.)

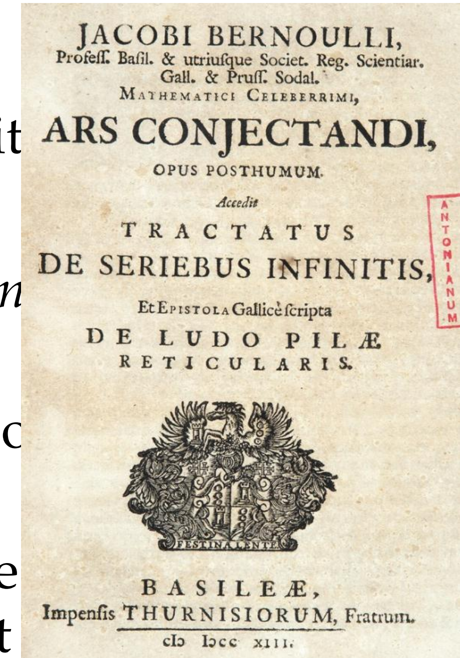
PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, *and* March, 1711.

DE MENSURA SORTIS, SEU; DE Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, *R. S. S.*

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres de Jakob Bernoulli (1654-1705)


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
FESTINA LENTE
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

Le tournant du début du XVIII^e s. en théorie des probabilit

– Peu de textes publiés depuis le traité, *De ratiocin* Christiaan Huyghens (1657) ;
– 1708, *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Pierre Rémo réédition augmentée 1713 ;
– 1711, *De mensura sortis*, Abraham de Moivre, mémoire traité *Doctrines of Chances*, éd. 1718, réédition en 1738 et
– 1713, *Ars Conjectandi*, Jakob Bernoulli. Édition posthume par son neveu Nicolas Bernoulli.

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres de Jakob Bernoulli (1654-1705)

Le tournant du début du XVIIIe s. en théorie des probabilités.

- Peu de textes publiés depuis le traité, *De ratiociniis in ludo aleae*, Christiaan Huyghens (1657) ;
- 1708, *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*, Pierre Rémond de Montmort, réédition augmentée 1713 ;
- 1711, *De mensura sortis*, Abraham de Moivre, mémoire développé en un traité *Doctrines of Chances*, éd. 1718, réédition en 1738 et 1756 ;
- 1713, *Ars Conjectandi*, Jakob Bernoulli. Édition posthume par son neveu Nicolas Bernoulli.

Ces travaux traitent, en grande partie, des mêmes problèmes, c'est-à-dire trouver les rapports des chances de gagner et les gains espérés dans des jeux de hasard.

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

L'*Ars conjectandi*, est divisé en quatre parties.

1. La première partie comporte une reproduction du traité de Huygens avec des notes et commentaires.
2. La seconde partie est un traité des permutations et des combinaisons.
3. La troisième comporte des problèmes relatifs à des jeux de chance avec leurs solutions.
4. La quatrième partie est restée inachevée, mais expose une réflexion en profondeur sur la probabilité. Son titre est « *L'art de conjecturer traitant de l'usage et l'application de la doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques"* .

   Elle contient surtout le théorème à propos duquel il avait écrit vers 1690 :

   > « ***Cette découverte a pour moi plus de valeur que si j'avais résolu la quadrature du cercle, car si j'avais trouvé cette dernière cela aurait été quand même moins utile.*** »

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

La quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

Dans le chapitre I, Jakob Bernoulli distingue **certitude objective** (vérité de l'existence présente ou future d'une chose) et **certitude subjective** (relative à notre connaissance touchant cette vérité).

Il définit la probabilité comme « ***degré de la certitude*** » et caractérise les événements **nécessaires** et **contingents**. « *Ce qui peut sembler contingent à quelqu'un en une circonstance, pour un autre (ou plutôt le même) en un autre temps, une fois les causes connues, sera nécessaire ; si bien que la contingence est surtout en rapport à notre connaissance […]* »

Dans les chapitres II et III, il formalise et algébrise les idées de la *Logique* de Port-Royal sur l'art de conjecturer, c'est-à-dire de « *mesurer la probabilité des choses* ».

« *Les probabilités sont estimées d'après le* nombre *et aussi le* poids des arguments *qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été.* »

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Le chapitre IV de la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

« *La double manière de rechercher les nombre de cas. Ce qu'il faut penser de celui qui est établi par les expériences. Problème particulier proposé à ce propos. etc.* ».

Bernoulli distingue « *les jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, … de telle sorte que tous les cas puissent arriver avec un égale facilité.* », et les autres phénomènes où « *cela n'a pas du tout lieu* », en particulier ceux dans lesquels les résultats dépendent de l'œuvre de la nature ou des hommes.

«… ***ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est au moins*** **a posteriori**, ***c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables*** *;* »

Ce qui est défini ici par Bernoulli est l'estimation. Il veut étudier la relation entre la probabilité d'un événement concernant une expérience aléatoire et la fréquence relative de celui-ci lors de la répétition de cette expérience.

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Le chapitre IV de la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

Bernoulli précise son but :

« *Il reste assurément à chercher si, **en augmentant ainsi le nombre des observations**, **nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres des cas qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu'il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse un degré quelconque de certitude** ;* »

Il prend l'exemple d'une urne qui contient des pierres blanches et des pierres noires dans une proportion inconnue et dont on souhaite déterminer cette proportion par tirage (avec remise) successif de pierres.

Il indique avoir travaillé depuis longtemps sur cette question :

« *Voici donc ce fameux problème dont j'ai proposé ici la publication, après l'avoir mis à jour il y a vingt ans déjà, et dont la nouveauté d'une part, la grande utilité d'autre part, jointes à une égale difficulté, peut ajouter du poids et du prix à tous les autres points de cette doctrine.* »

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Le chapitre V de la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

Bernoulli y démontre son théorème qu'il énonce ainsi :

« *… j'appellerai* fertiles *les cas dans lesquels un événement peut se produire, et* stériles *les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences* fertiles *celles pour lesquelles on constate qu'un des cas* fertiles *peut survenir, et* stériles *celles pour lesquelles on observe qu'un des cas* stériles *se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement dans le rapport r/s et qu'il soit en conséquence au nombre de tous dans le rapport r/(r+s) ou r/t rapport qu'encadre les limites* $\frac{r-1}{t}$ *&* $\frac{r+1}{t}$*. Il faut montrer que* ***l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre d'observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que*** $\frac{r+1}{t}$ ***ni plus petit que*** $\frac{r-1}{t}$. »

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Le chapitre V de la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

Bernoulli y démontre son théorème qu'il énonce ainsi :

« *… j'appellerai* fertiles *les cas dans lesquels un événement peut se produire, et* stériles *les cas dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences* fertiles *celles pour lesquelles on constate qu'un des cas* fertiles *peut survenir, et* stériles *celles pour lesquelles on observe qu'un des cas* stériles *se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement dans le rapport r/s et qu'il soit en conséquence au nombre de tous dans le rapport r/(r+s) ou r/t rapport qu'encadre les limites* $\frac{r-1}{t}$ *&* $\frac{r+1}{t}$. *Il faut montrer que* ***l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre d'observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que*** $\frac{r+1}{t}$ ***ni plus petit que*** $\frac{r-1}{t}$. »

En termes modernes : $$\text{Proba}\left(\frac{\text{r - 1}}{\text{t}} < \frac{\text{Nb obs. fertiles}}{\text{Nb obs. total}} < \frac{\text{r + 1}}{\text{t}}\right) > \frac{\text{c}}{\text{c+1}}$$

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Le chapitre V de la quatrième partie de l'*Ars conjectandi*.

Choisissant c = 1000, r = 30, s = 20, Bernoulli conclut :

« *De là on déduit, qu'ayant fait 25 550 expériences, il est vraisemblable de plus de mille fois que le rapport du nombre d'observations fertiles au nombre de toutes sera compris entre les limites 31/50 et 29/50 plutôt qu'en dehors* »

Soit, si l'on effectue au moins 25 550 expériences,

$$\text{Proba}\left(\frac{29}{50} < \frac{\text{Nb obs. fertiles}}{\text{Nb obs. total}} < \frac{31}{50}\right) > \frac{1000}{1000+1} \simeq 0,999$$

La relation entre fréquence et probabilité
La loi faible des grands nombres

Remarques

- Le nom de « **loi des grands nombres** » utilisé maintenant pour cet énoncé n'apparaît qu'en 1837 dans le préambule de l'ouvrage de Siméon Denis Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements*.

- Il a fallu attendre une vingtaine d'années pour que ce résultat soit publié. D'une part, Bernoulli souhaitait ajouter des applications de son théorème qu'il a recherché vainement jusqu'à la fin de sa vie et d'autre part sa mauvaise relation avec son frère Johann, ont retardé la publication de l'ouvrage après son décès.

- Une approche efficace du problème de la **probabilité inverse** (que peut-on dire de la probabilité d'un événement quand on connaît sa fréquence de réalisations sur un certain nombre de répétitions ?) ne sera effectuée qu'à la fin du XVIII^{e} s. par **Bayes** et **Laplace** puis par le théorème central limite (**loi forte des grands nombres**) au début du XIX^{e} s.

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Georges-Louis Leclerc comte de Buffon est principalement connu comme naturaliste mais c'est suite à la publication d'un mémoire sur le jeu de Franc Carreau qu'il a fait son entrée dans la classe de mécanique de l'Académie des Sciences en 1733.

Ce mémoire, publié dans le Supplément à l'Histoire Naturelle, traite de probabilités continues et contient la fameuse expérience de lancers de baguettes sur un parquet qui fait apparaître le nombre π.

« *L'expérience et l'analogie peuvent nous donner des certitudes différentes à peu-près égales & quelque fois du même genre […]. La certitude physique doit se mesurer par un nombre immense de probabilités puisque cette certitude est produite par une suite constante d'observations, qui sont ce qu'on appelle l'*expérience de tous les temps. *La certitude morale doit se mesurer par un moindre nombre de probabilités puisqu'elle ne suppose qu'un certain nombre d'analogies avec ce qui nous est connu.* »

Essai d'arithmétique morale , Chap. VI, p. 51-52

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Plus loin Buffon ajoute :

« *Pour me faire mieux entendre, supposons que dans une loterie, il n'y a qu'un seul lot & 10 000 billets, un homme ne prenne qu'un billet, je dis que la probabilité d'obtenir le lot n'étant que d'un contre dix mille, son espérance est nulle puisqu'il n'y a pas plus de probabilité, c'est-à-dire, de raison d'espérer le lot qu'il y en a de craindre la mort dans les vingt-quatre heures.* ***Ainsi dans tous les jeux, les paris, les risques, les hasards ; dans tous les cas, en un mot, où la probabilité est plus petite que 1/10 000, elle doit être & elle est en effet pour nous absolument nulle****.* »

Essai d'arithmétique morale , Chap. VIII, p. 57-58

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Énoncé du « problème de St Pétersbourg »

« Cette question, par exemple, du jeu de croix & pile, où l'on suppose que deux hommes (Pierre et Paul) jouent l'un contre l'autre, à ces conditions que ***Pierre jettera en l'air une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire pour qu'elle présente croix, & que si cela arrive au premier coup, Paul lui donnera un écu ; si cela n'arrive qu'au second coup, Paul lui donnera deux écus ; si cela n'arrive qu'au troisième coup, Paul lui donnera quatre écus … & ainsi de suite en doublant toujours le nombre des écus*** *; il est visible que par cette condition Pierre ne peut que gagner, & que son gain sera au moins un écu, peut-être deux écus, peut-être quatre écus, … peut-être même dix millions, cent millions, cent mille millions d'écus, peut-être enfin une infinité d'écus. Car il n'est pas impossible de jeter cinq fois, dix fois, vingt fois, mille fois la pièce sans qu'elle présente croix.* ***On demande donc combien Pierre doit donner à Paul pour l'indemniser , ou ce qui revient au même, quelle est la somme équivalente à l'espérance de Pierre qui ne peut que gagner****.»*

Essai d'arithmétique morale , Chap. XV, p. 74-75

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Résolution du « problème de St Pétersbourg » par Montmort

« ***M. de Montmort donne la solution de ce problème*** *par les règles ordinaires, & il dit, que la somme équivalente à l'espérance de celui qui ne peut que gagner, est égale à la somme de la suite 1/2 , 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2 écu &c. continuée à l'infini, & que par conséquent* ***cette somme équivalente est une somme d'argent infinie.*** *[…]*

Cela est mathématiquement vrai, & on ne peut contester ce calcul *; aussi M. de Montmort & les autres Géomètres ont regardé cette question comme bien résolue ; cependant* ***cette solution est si éloignée d'être la vraie*** *qu'au lieu de donner une somme infinie, ou même une très grande somme, ce qui est déjà fort différent,* ***il n'y a pas d'homme de bon sens qui voulût donner vingt écus ni même dix****, pour acheter cette espérance en se mettant à la place de celui qui ne peut que gagner*»

Essai d'arithmétique morale , Chap. XV, p. 78-79

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Résolution du « problème de St Pétersbourg » par Buffon

« *La raison de cette contrariété extraordinaire du bon sens & du calcul vient de deux causes, la première est que* ***la probabilité doit être regardée comme nulle, dès qu'elle est très petite, c'est-à-dire, au-dessous de 1/10 000*** *; la seconde cause est le peu de proportion qu'il y a entre l'argent et les avantages qui en résultent ; le Mathématicien dans son calcul, estime l'argent par sa quantité, mais l'homme moral doit l'estimer autrement ; […]* ***la valeur de l'argent, par rapport à l'homme moral, n'est pas proportionnelle à sa quantité, mais plutôt aux avantages que l'argent peu procurer.*** »

Essai d'arithmétique morale , Chap. XVI, p. 79-80

Buffon indique ensuite que la suite des 1/2 ne peut avoir **moralement** plus de 30 termes car la somme due à Pierre serait supérieure à 5[36] 870 912 écus, « *autant d'argent qu'il en existe peut-être dans tout le royaume de France* ».

Buffon
Essai d'arithmétique morale
Supplément à l'Histoire Naturelle, tome 4, 1777

Résolution du « problème de St Pétersbourg » par Buffon

« *J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire, j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu en faisant jeter la pièce en l'air par un enfant ; les deux mille quarante-huit parties ont produit dix mille cinquante-sept en tout, ainsi la somme équivalente est à peu-près cinq écus pour chaque partie.* »

Essai d'arithmétique morale , Chap. XVIII, p. 84

Rapport (écus)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	10 057
Nb parties de l' expérience	1061	494	232	137	56	29	25	8	6	0	0	0	2048
Nb théorique de parties	1025	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	**0**	2048

La somme théorique vaut 11 265 ce qui donne une espérance de 5,5 « *qui s'accorde avec l'expérience à 1/11 près.* »